# Тема 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Под математическим моделированием понимают способ исследования различных процессов путем изучения явлений, имеющих *различное физическое содержание,* но описываемых *одинаковыми математическими соотношениями.* При изучении любого процесса методом математического моде­лирования необходимо в первую очередь построить его матема­тическое описание, или, как мы далее будем говорить, *матема­тическую модель.* В простейших случаях, математическая модель позволяет для данного процесса-оригинала подобрать на основании известных аналогий удобные физические процессы-модели, а также установить соот­ношения подобия, связывающие их параметры, без которых трудно использовать результаты моделирования для изучения процесса-оригинала. В более сложных случаях, когда для моде­лирования создаются специальные моделирующие установки (стенды) или используются вычислительные машины, математическая модель необходима для определения структуры и параметров стенда или построения моделирующего алгоритма.

**2.1. Понятие математической модели**

Математическая модель, описывает *формализованный* про­цесс функционирования системы и в состоянии охватить только основные, характерные его закономерности.

Процесс функционирования любой системы будем рассма­тривать как последовательную смену ее состояний в некотором интервале времени (*t0*,*t1).* Состояния системы в каждый момент времени *t* из упомянутого интервала характеризуются набором величин *z1, z2, …, zn*. Процесс функционирования системы рассматриваем как последовательную смену состояний, и *z1(t), z2(t), …, zn(t)* являются функциями времени *t.* В дальнейшем будем называть их *характеристиками состояний* системы.

**Под *математической моделью* реальной системы будем пони­мать *совокупность соотношений* (например, формул, уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т. д.), *определяю­щих характеристики состояний системы (а через них и выход­ные сигналы) в зависимости от параметров системы, входных сигналов, начальных условий и времени.***

Однако при исследовании реальных систем не всегда удается построить математические модели в виде явных функций или уравнений.

Перейдем к некоторым общим замечаниям, связанным с по­нятием математической модели.

1. *Однозначность* определения характе­ристик состояний системы и выходных сигналов через пара­метры системы, входные сигналы и начальные условия. Это тре­бование выполняется для так называемых детерминированных моделей, представляющих собой совокупность неслучайных со­отношений. Если при этом начальные условия и входные сиг­налы не случайны, то модель оказывается *вполне детерминированной.* На практике нередко приходится рассматривать *случайные* процессы функционирования различных систем. Характеристики состояний системы для таких процессов оказываются случай­ными функциями времени. Будем говорить, что при помощи математической модели *однозначно* определяются *рас­пределения вероятностей* для характеристик состояний системы, если заданы распределения вероятностей для начальных условий, параметров системы и возмущений, действующих на ее элементы, а также для входных сигналов.
2. *Выбор совокупности пара­метров*, характеризующих исследуемую систему. Реальные процессы, если их рассматривать во всех деталях, весьма сложны. Учет большого количества второ­степенных деталей оказывается практически нецелесообразным. В большинстве случаев при решении прикладных задач доста­точно учитывать лишь основные стороны исследуемого процесса. Поэтому обычно при построении математической модели про­цесса ограничиваются сравнительно небольшим количеством па­раметров. В таких условиях, естественно, об однозначности оп­ределения набора параметров, характеризующих систему, не может быть и речи.
3. *Определение совокупности начальных условий*. На этапе формализации процесса, когда контуры математической модели еще недостаточно выяснены, определить перечень начальных условии не представляется воз­можным. Когда же математическая модель построена, перечень начальных условий может быть определен однозначно. Естественно, что перечень начальных условий зависит от того, какие выбраны характеристики состояний системы.

Математическая модель может появиться только как след­ствие четкого формального описания рассматриваемого процесса с требуемой степенью приближения к действительности, только в результате *формализации* процесса.

## 2.2. Формализация процессов функционирования сложных систем

Математическая модель является результатом *формализа­ции* процесса, т. е. построения четкого формального (математи­ческого) описания процесса с необходимой степенью приближе­ния к действительности.

Модель объекта моделирования, т. е. системы S, можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функцио­нирования реальной системы и образующих в общем случае сле­дующие подмножества:

* совокупность ***входных воздействий*** на систему*х∈Х, i=1,..nx;*
* совокупность ***воздействий внешней сред****ы vi∈V, i=1, ..,пv***;**
* совокупность ***внутренних (собственных) параметров*** системы *hi∈H, i=1, ..,пh***;**
* совокупность ***выходных характеристик*** системы *yi∈Y, i=1, ..,пy***;**

Причем в перечисленных подмножествах можно выделить управляемые и неуправляемые переменные.

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени *уj(t)* для всех видов *j=1,…, пу* называется ***выходной траекторией*** *.* Зависимость называется *законом функ­ционирования системы S* и обозначается *Fs.*

Весьма важным для описания и исследования системы S являет­ся понятие ***алгоритма функционирования As****,* под которым понимает­ся метод получения выходных характеристик с учетом входных воз­действий *x(t),* воздействий внешней среды *v(t)* и собственных па­раметров системы *h (t).* Очевидно, что один и тот же закон функ­ционирования *Fs* системы S может быть реализован различными способами, т. е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования *As*.

Очевидно, что детерминированная модель является частным случаем стохастической модели.

Приведенные математические соотношения представляют собой математические схемы общего вида и позволяют описать широкий класс систем. Однако в практике моделирования на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать ***типовые математические схемы****:* дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания и т. д.

При построении математических моделей про­цессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно–детерминированный (например, дифференциальные уравнения); дискретно–детерминированный (ко­нечные автоматы); дискретно-стохастический (вероятностные авто­маты); непрерывно-стохастический (системы массового обслужи­вания); обобщенный или универсальный (агрегативные системы).

Математические схемы, рассматриваемые в последующих па­раграфах данной главы, должны помочь оперировать различными подходами в практической работе при моделировании конкретных систем.

**2.3.Математические схемы**

### 2.3.1.Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)

Обычно в таких математических моделях в качестве независи­мой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время *t.* Тогда математическое соотношение для детерми­нированных систем в общем виде будет

,

где:

и  -- n-мерные векторы,

-- вектор-функция, которая определена на некотором (n+1)—мерном множестве (ŷ,t) и является непрерывной.

Так как математические схемы такого вида отражают динами­ку изучаемой системы, т. е. ее поведение во времени, то они назы­ваются ***D-схемами*** (англ. dynamic)**.**

Использование *D-схем* позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно–детерминированных систем S и оценить их основные характеристики, применяя анали­тический или имитационный подход, реализованный в виде соответствующего языка для моделирования непрерывных систем или использующий аналоговые и гибридные средства вычислительной техники.

### 2.3.2. Дискретно-детерминированные модели (f-схемы)

Особенности дискретно–детерминированного подхода на этапе формализации процесса функционирования систем может быть рассмотрен на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов. На основе этой теории система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Абстрактно конечный автомат (англ. finite automata) можно представить как математическую схему ***(F-схему****),* характеризующуюся шестью элементами:

* конечным множеством Х входных сигналов (входным алфавитом);
* конечным множеством Y выходных сигналов (выходным алфавитом);
* конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний);
* начальным состоянием z0, z0∈Z;
* функцией переходов ϕ(z,x);
* функцией выходов ψ(z, x).

Автомат, задаваемый *F-схемой,* принято обозначать*:*

F=*<****Z, X, Y****,ϕ,ψ,z0>.*

Абстрактный конечный автомат имеет один входной и один вы­ходной каналы. В каждый момент *t=0,* 1, 2,... дискретного вре­мени F-автомат находится в определенном состоянии *z(t)* из мно­жества ***Z*** состояний автомата, причем в начальный момент времени *i=0* он всегда находится в начальном состоянии *z(0)=zo*. В мо­мент *t,* будучи в состоянии *z(t),* автомат способен воспринять на входном канале сигнал *x(t)∈X* и выдать на выходном канале сигнал *у(t)*=*ψ[z(t), x(t)],* переходя в состояние *z(t+1)=* =*ϕ[z(t),x(t)], z(t)∈****Z****, y(t)∈****Y****.* Другими словами, если на вход конечного автомата, установленного в на­чальное состояние *z0*, подавать в некоторой последовательности буквы входного алфавита *х(0), х(1), х(2),...,* т. е. входное слово, то на выходе автомата будут последовательно появляться буквы выходного алфавита *у(0), у(1), у (2),...,* образуя вы­ходное слово.

Сказанное выше можно описать следующими уравнениями: для F-автомата первого рода, называемого также автоматом Мили,

*z(t+1)=* =*ϕ[z(t),x(t)], у(t)*=*ψ[z(t), x(t)], t*=0,1,2,...; (2.1)

для F-автомата второго рода

*z(t+1)=ϕ[z(t),x(t)], у(t)*=*ψ[z(t), x(t-1)], t*=0,1,2,...; (2.2)

Автомат второго рода, для которого *у(t)*=*ψ[z(t)], t*=0,1,2,..., т. е. функция выходов не зависит от входной переменной *х {t),* называется автоматом Мура.

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного со­стояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием.

По характеру отсчета дискретного времени конечные автоматы делятся на *синхронные и асинхронные*. В синхронных F-автоматах моменты времени, в которые автомат «считывает» входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующи­ми сигналами. Реакция автомата на каждое значе­ние входного сигнала заканчивается за один такт, длительность которого определяется интервалом между соседними синхронизи­рующими сигналами. Асинхронный F-автомат считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный входной сигнал постоянной величины *х,* он может, несколько раз изменять состояние, выдавая соот­ветствующее число выходных сигналов, пока не перейдет в устой­чивое, которое уже не может быть изменено данным входным.

**2.3.3. Дискретно-стохастические модели (Р-схемы)**

Рассмотрим особенности построения математических схем при дискретно-стохастическом подходе к формализации процесса функ­ционирования исследуемой системы S. Поскольку сущность дискре­тизации времени при этом подходе остается аналогичной рассмот­ренным конечным автоматам, то влияние фактора стохастичности проследим также на разновидности таких автоматов, а именно на вероятностных (стохастических) автоматах. В общем виде *вероятностный автомат* (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразо­ватель информации с памятью, функционирование которого в каж­дом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.

Вероятностный автомат может быть описан либо таблицей переходов, либо матрицей переходов Р-автомата и начальным распределением вероятностей. Математический аппарат, используемый при исследовании Р-автоматов, является аппарат марковских цепей.

**2.3.4. Непрерывно-стохастические модели (q-схемы)**

Особенности непрерывно-стохастического подхода рассмотрим на примере использования в качестве типовых математических схем *систем массового обслуживания,* (англ. queueing system), которые будем называть *Q-схемами.* Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например: потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т. д. При этом характерным для работы таких объек­тов является случайное появление заявок (требований) на обслу­живание и завершение обслуживания в случайные моменты време­ни, т. е. стохастический характер процесса их функционирования. Остановимся на основных понятиях массового обслуживания, не­обходимых для использования *Q-схем* как при аналитическом, так и при имитационном подходе.

Работа любой системы массового обслуживания состоит в выполнении поступающего на ее вход потока заявок. Заявки поступают в некоторые, в общем случае случайные, моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то время, также случайное, после чего канал освобождается для обслуживания следующей заявки. Предмет теории массового обслуживания – установление зависимостей между характером потока заявок, производительностью отдельного канала обслуживания, числом каналов и эффективностью обслуживания.

Случайный процесс, протекающий в СМО состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое. СМО представляет собой физическую систему дискретного типа, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком. В любой момент времени система пребывает в одном из возможных состояний и очевидно, что для любого t справедливо:



Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.

С дискретным временем: переходы из состояния в состояние могут происходить только в строго определенные, разделенные конечными интервалами моменты времени t1, t2 … .

С непрерывным временем: переход системы из состояния в состояние возможен в любой момент времени.

Случайные процессы, протекающие в СМО как правило являются процессами с непрерывным временем. Граф перехода системы из состояние в состояние может быть проиллюстрирован рис. 2.1.



**2.3.5. Обобщенные модели (А-схемы)**

Наиболее известным общим подходом к формальному описанию процессов функционирования систем является подход, предложенный Н.П.Бусленко. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических, т.е. по сравнению с рассмотренными является обобщенным (универсальным) и базируется на понятии агрегатируемой системы, представляющей собой формальную схему общего вида, которую принято называть А-схемой.

Анализ существующих средств моделирования показывает, что комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания и реализации модели, возможно только в том случае, когда моделирующие системы имеют в своей основе единую формальную математическую схему. Такая схема должна выполнять следующие функции:

* являться адекватным математическим описанием объекта моделирования;
* служить основой для построения алгоритмов и программ, реализующих модель;
* позволять в упрощенном варианте проводить аналитические исследования.

В качестве элемента А-схемы выступает агрегат. Связь между агрегатами (внутри системы S и внешней средой Е) осуществляется опеатором R. Агрегат может разбиваться на агрегаты следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется следующими множествами:

* моментами времени Т;
* входными сигналами Х;
* выходными сигналами У;
* состояниями на каждый момент времени Z(t).

Переход агрегата из состояния в состояние происходит за малый интервал времени δt z(t2)≠z(t1). Изменение состояния определяется скачком δz. Агрегат из состояния в состояние переходит в зависимости от собственных (внутренних) параметров h(t) и входных сигналов x(t).

В начальный момент времени агрегат находится в состоянии z(t0)=z0, которое задается законом L(z(t0)).

Процесс функционирования агрегата в случае воздействия сигнала xn описывается случайным оператором V. Пусть в момент времени tn поступил сигнал xn. Состояние агрегата определиться так:

Z(tn+0)=V(tn,z(tn),xn).

Если в течение времени (tn,tn+1) не пришло ин одного входного сигнала, то агрегат может перейти в другое состояние за счет изменение внутреннего состояния в соответствии со случайным оператором U:

z(t)=U(t,tn,z(tn+0)).

Совокупность случайных операторов V и U рассматривается как оператор перехода автомата в новые состояния. При этом процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний δz в моменты поступления новых сигналов х и изменений состояний агрегата между этими моментами. Моменты скачков δz называются особыми состояниями А-схемы. Для описания скачков в особые моменты используется оператор W, представляющий собой частный случай оператора U:

*z(tδ)=W(tδ,z(tδ)).*

В множестве состояний агрегата выделяется подмножество Z(Y), которое является подмножеством выдачи выходного сигнала:

*Y=G(tδ,z(tδ)).*

Таким образом, под агрегатом будем понимать объект, определяемый упорядоченной совокупностью рассмотренных множеств T, X, Y, Z, Z(Y), H и случайных операторов V, U, W, G.

Последовательность входных сигналов, расположенных в порядке поступления их на вход А-схемы называют входным сообщением, а последовательных выходных – выходным сообщением.

Существует класс больших систем, которые ввиду их сложности не могут быть формализованы в виде математических схем одиночных агрегатов, поэтому их формализуют некоторой конструкцией из отдельных агрегатов. Для описания системы в целом, необходимо иметь описание как отдельных агрегатов, так и связей между ними.

Для построения формального понятия А-схемы необходимо выбрать способы математического описания взаимодействия между агрегатами. Для этого вводится ряд предположений о закономерностях функционирования А-схем, которые согласуются с опытом исследования реальных сложных систем:

* взаимодействие между А-схемой и внешней средой Е, а также между отдельными агрегатами внутри системы осуществляется при передаче сигналов, причем взаимные влияния, имеющие место вне механизма передачи сигналов не учитываютяся;
* для описания сигнала достаточно некоторого конечного набора характеристик;
* элементарные сигналы мгновенно передаются в А-схеме независимо друг от друга по элементарным каналам;
* ко входному контакту любого элемента А-схемы подключается не более чем один элементарный канал, к выходному контакту – любое конечное число элементарных каналов.

Взаимодействие А-схемы с внешней средой рассматривается как обмен сигналами между внешней средой и элементами А-схемы. В связи с этим внешнюю среду можно представить в виде фиктивного элемента А-схемы.

Таким образом, использование обобщенной типовой математической схемы моделирования А\_схемы в принципе не отличается от использования рассмотренных ранее D, F, P, Q-схем. Для частного случая результаты могут быть получены аналитическим методом. В более сложных случаях прибегают к имитационному методу.

Представление объекта моделирования в виде А-схемы может являться тем фундаментом, на котором базируется построение имитационной системы и ее внешнего и внутреннего математического обеспечения. Стандартная форма представления исследуемого объекта в виде А-схемы приводит к унификации не только алгоритмов имитации, но и к возможности применять стандартные методы обработки и анализа результатов моделирования.